المحاضرة 11 مع التمارين

مراجعة:

* الدالة λ^* المعرفة سابقاً تعرف قياساً خارجياً وذلك حسب القياس الخارجي ومشروطه على $P(\mathbb{R})$ فإذا صنف لا هنا له $P(\mathbb{R})$ قياساً أو جبر تام على $\mathbb{R}$. (من الكتاب).

تعريف: المجموعة المقيسة بالنسبة لـ λ^*: العمل على $\mathbb{R}$ أي $X=\mathbb{R}$

ليكن λ^* قياس خارجي على $P(\mathbb{R})$ نقول عن المجموعة $E\in\mathbb{R}$ إنها مقيسة بالنسبة لـ λ^* إذا تحقق ما يلي:

$$\lambda^*(A)=\lambda^*(A\cap E)+\lambda^*(A\cap \tilde{E})$$

حيث $A\in P(\mathbb{R})$.

- نرمز لصف المجموعات المقيسة بالنسبة لـ λ^* بالرمز: $\mathcal{L}=\mathfrak{M}_{\lambda^*}$.

وهذا الصف عبارة عن جبر تام على $\mathbb{R}$ حسب مثال سابق. كما أن:

$\lambda=\lambda^*|_{\mathcal{L}}$ ← مقصور

يعرف قياساً على $\mathcal{L}$. ونلاحظ هنا أن:

$$P_1=\{\,]a,b]\,;\ -\infty<a<b<\infty\}\cup\emptyset\subseteq K(P_1)=\beta(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{L}$$

أي كل مجموعة بوريلية مقيسة لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

- نسمي القياس λ المعرف على الجبر التام $\mathcal{L}$ قياس ليبيغ على $\mathbb{R}$ وكل مجموعة مثل (حيث $\lambda:\mathcal{L}\to[0,\infty]$)
$F\in\mathcal{L}$ نسمي مقيسة حسب مفهوم ليبيغ. وقياس ليبيغ لها هو $\lambda(F)$ أو كما يسمونه قياس ليبيغ وحيد البعد. مثلاً:

$$\lambda(\mathbb{N})=\lambda(\mathbb{Z})=0$$

$$\lambda([1,5])=\lambda(]1,5])=4$$

إذاً قياس الفترات هو طولها لذا نسمي قياس ليبيغ تعميماً لمفهوم الطول.

تمارين:

ليكن $X\neq\emptyset$ المجموعة الأساسية، S جبر تام عليها، μ قياس على S

عندئذٍ:

القياس المنتهي:

يقال عن القياس μ على S إنه منتهٍ إذا كان: $\mu(X) < \infty$

وللتعرف على سبيل المثال أن $\mu(X) = 1$ فإن μ يسمى قياساً احتمالياً

مثال:

إذا أخذنا $\mu : S \longrightarrow [0, \infty]$

$\text{OR } [-\infty, \infty]$

$: E \longrightarrow \mu(E) = 0$

حيث S جبر تام على $X \neq \emptyset$ ، $E \in S$ فنجد أن μ تحقق جميع شروط القياس. ويكون $\mu(X) = 0 < \infty$ والقياس منتهٍ. أي القياس الصفري منتهٍ

σ - منتهٍ:

يقال عن القياس μ السابق إنه قياس σ - منتهٍ على X إذا استطعنا إيجاد متتالية من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى $\{E_n\}_{n \geq 1}$ من عناصر S بحيث أن

① $\mu(E_n) < \infty \quad ; \quad \forall\, n \geq 1$

② $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ قد تكون $X = \mathbb{R}$

مثال: على قياس σ - منتهٍ:

قياس ليبيغ λ المعرف على $\mathbb{R}$ يفيد في ذلك حيث: $S = P(\mathbb{R})$

$E_n = [-n, -n+1] \cup [n-1, n] \; ; \; n = 1, 2, \ldots$

لوجدنا أن هذه المجموعات منتهية ومنفصلة مثنى مثنى كما أن:

الشرط ①: $\mu(E_n) = 2 < \infty \; ; \; n \geq 1$

②: $X = \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

فيما عدا ذلك يكون القياس غير منتهٍ بالتالي غير σ - منتهٍ

ملاحظة:

كل قياس منتهٍ هو σ - منتهٍ لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال الحل:

لنفرض X مجموعة غير منتهية ولنعرف الدالة μ^* بالصورة:

$\mu^*: P(X) \longrightarrow [0, \infty]$

$; \quad E \longmapsto \mu^*(E) = \begin{cases} \sqrt{n} \; ; & E \text{ منتهية عدد عناصرها } n \\ \infty \; ; & E \text{ غير منتهية} \end{cases}$

بين اذا كان μ^* قياس خارجي على $P(X)$ مع التعليل.

الدالة القيوسة: ليست مقيسة.

سنتعرف الآن على مفهوم الدالة القيوسة بشكل عام ونحصر اهتمامنا بدراسة الدوال الحقيقية (وقد بينا مثال عددي) القيوسة والغير قيوسة وهي الحالة الأكثر فائدة فيما يتعلق بتطوير التكامل حسب مفهوم ليبيغ فيما بعد.

لتكن f دالة معرفة على الشكل: $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ or $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$; \quad x \longmapsto f(x)$

حيث $E \in \mathcal{L}$ (مجموعة مقيسة لوبيغيا).

تكون هذه الدالة بالتعريف (الدالة القيوسة) قيوسة اذا كانت احدى المجموعات التالية مقيسة:

1) $E = (f > c) = \{ x \in E ; f(x) > c \}$

على E حل هذه المراجعة (ليس كل E)

2) $E(f \geq c) = \{ x \in E ; f(x) \geq c \}$.

علينا حل المراجعة على E.

3) $E(f < c) = \{ - - - \}$

4) $E(f \leq c) = \{ ——— - \}$

$; \quad c \in \mathbb{R}$

وهذا تعريف الدالة القيوسة على المجموعة E.

مبرهنة ①:

اذا كانت $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ or $\overline{\mathbb{R}}$ وكانت $\lambda(E) = 0$ أي مجموعة صفرية

عندئذ تكون هذه الدالة قيوسة على E.

الاثبات: لدينا $E \in \mathcal{L}$ (مقيسة لوبيغيا). ولما كانت $E(f > c)$ مجموعة جزئية من E حيث $\forall c \in \mathbb{R}$ بالتالي يكون:

$0 \leq \lambda[E(f > c)] \leq \lambda(E) \underset{\text{فرضاً}}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda[E(f>c)] = 0 \Leftrightarrow E(f>c)$

$\forall c \in \mathbb{R}$ مقيسة حسب ليبيغ

وهذا يعني أن الدالة f قيوسة على E حسب تعريف الدالة القيوسة.

مبرهنة (2):

اذا كانت $E \ni \mathfrak{m}_{\lambda}$ (مجموعة مقيسة) ، $A \subseteq E$ مقيسة لأنه جزئية منه. فإنه اذا كانت f قيوسة على E تكون أيضاً قيوسة على المجموعة A.

مثال:

الدالة $f(x) = x^2+1$ قيوسة على الفترة $E = [0,10]$ عندها فهي قيوسة على أي فترة جزئية منها حسب المبرهنة (2).

ملاحظة (مبرهنة):

اذا كانت f قيوسة على المجموعات $E_1, E_2, \ldots$ المقيسة ومنفصلة مثنى مثنى تكون هذه الدالة قيوسة على اتحادها. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

مثال:

لنفرض الدالة f:

$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ or $\overline{\mathbb{R}}$

$x \longmapsto f(x) = \alpha = Const.$ ؛

أوضح ان هذه الدالة قيوسة على E.

الحل: أياً كان $c \in \mathbb{R}$ يكون:

$$E(f>c) = \begin{cases} E & ; \ \alpha > c \\ \emptyset & ; \ c \geq \alpha \end{cases}$$

($\emptyset$ ← لا يوجد)

حيث: $E(\alpha > c) = \{x > c$ جميع الأعداد التي من أجلها $\}$

$= E$

- بما أن المجموعتين $\emptyset$ ، E مقيستان حسب ليبيغ الذي قياسه λ مما يعني أن المجموعة $E(f=\alpha > c)$ مقيسة أياً كان $c \in \mathbb{R}$

والذي يعني أن f الثابتة قيوسة على $E \subseteq \mathbb{R}$.

مثال منزلي:

هل الدالة المطردة - ذ.ت.م - دالة ديريخليه قيوسة على مجموعات

تقترحها تيفيله مثلاً : $E=[0,1]$.

(*) سنتعرض لمفهوم جديد ألا وهو مفهوم ((تقريباً في كل مكان على مجموعة أم في كل مكان تقريباً أو تكاد تكون محققة في كل مكان تقريباً)) .

مفهوم الخاصية المحققة تقريباً في كل مكان:

يقال عن علاقة ما (خاصية رياضية ما) أنها محققة تقريباً في كل مكان على المجموعة $E \ni$ & اذا كانت العلاقة أو الخاصية (*) محققة على $E - E_0$

مثلاً: $x \in \mathbb{R}-\{3\}$; $\frac{x-2}{x-3}$ ونكتب في هذه الحالة $\overset{a.e}{(*)}$ أي أن

هذه الخاصية محققة من أجل كل $x \in E$ تقريباً ما عدا مجموعة جزئية

$E_0 \subseteq E$ بحيث أن $\lambda(E_0)=0$ قياس ليبيغ لـ E_0 في قيوسية أو كولة .

والعنصر $x \in E$ اما أن يحقق هذه الخاصية أم لا . ويمكن لهذه الخاصية أن تكون مثلاً التساوي بين دالتين - الاستمرار - الاشتقاق - التقارب النقطي - ...

مثال:

دالة ديرخليه المعرفة سابقاً على الفترة $[0,1]$ تساوي 0 تقريباً في كل مكان على هذه الفترة أي أن $\varphi(x) \overset{a.e}{=} 0$ حيث:

$x \in [0,1] - \mathbb{Q}$. ; $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

↙ معدودة ومقيسة.

مثال (بدون برهنة):

اذا كانت كل من الدالتين f_1, f_2 متساويتان تقريباً في كل مكان على المجموعة E المقيسة وكانت احداهما قيوسة على E فان الأخرى هي أيضاً قيوسة على E أيضاً . $f_1 \overset{a.e}{=} f_2$

تطبيق:

$f_1 = \frac{x^2-16}{x-4} = f_2 = x+4$; $x \in \mathbb{R}-\{4\}$

متساويتان دوماً الا عند $x=4$ حيث:

$\lambda(\{x\}) = \lambda(\{4\}) = 0$

برهنة:

دالة محدودة و $\overset{a.e}{=} 0$ سيكون تكامل ليبيغ لها يساوي الصفر.